ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ιανουάριος 2016

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

<u>**Θέμα**</u> 1 : Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1 = 0$. Να αποδειχτεί ότι αυτή έχει μια ρίζα $x^* \in [0, 1]$. Για την εύρεση της ρίζας αυτής προτείνεται ο αλγόριθμος

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^3 + x_n^2 + 1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Να αποδείξετε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στη ρίζα x^* για κάθε x_0 που βρίσκεται στο διάστημα $I = [0, 1]$.

<u>**Θέμα**</u> 2 : Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο της LU παραγοντοποίησης. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.)

<u>**Θέμα**</u> 3 : Δίνεται η συνάρτηση $f \in C^3[0, 2]$ από τον πίνακα τιμών

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	1	1

και είναι γνωστό ότι

$$\max_{0 \leq x \leq 2} f^{(3)}(x) = 4.$$

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα παραπάνω σημεία, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Νεύτωνα με διαιρεμένες διαφορές. Στη συνέχεια να βρεθεί το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στο διάστημα $[0, 2]$.

<u>**Θέμα**</u> 4 : Δοθέντος ότι η συνάρτηση f, που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	9	7	1	-3	1

,

είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ και $\int_0^1 f(x)dx$, χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης, χωρίς να βρεθεί η f.